El conjunto de Cantor

Miguel Ángel García Álvarez

En el año 1884, se publicó un artículo Georg Cantor, en el cual mostró con un ejemplo que un conjunto perfecto (es decir, que es igual al conjunto de sus puntos de acumulación) de números reales no necesariamente es denso. Su ejemplo fue el ahora conocido como Conjunto de Cantor y demostró que ese conjunto no es denso en ningún intervalo (denso en ninguna parte).

Conjuntos como el denominado "de Cantor" ya habían sido definidos por H. J. S. Smith en 1875:

"Sea m un número natural mayor que 2. Dividamos el intervalo $[0,1]$ en m partes iguales y eliminemos el último segmento. Dividamos cada uno de los $m-1$ segmentos restantes en m partes iguales y eliminemos el último segmento de cada uno. Si esta operación se continúa hasta el infinito, obtendremos un número infinito de puntos de división P sobre la línea de 0 a 1. Estos puntos están en orden suelto (así se refería Smith a los conjuntos densos en ninguna parte)."

Demostró además que los conjuntos definidos de esa manera tienen contenido cero: Después de la primera división quedan $m-1$ intervalos de longitud $\frac{1}{m}$, de manera que la suma de sus longitudes es $\frac{m-1}{m}$; al dividir cada uno de esos $m-1$ intervalos en m partes iguales y eliminando el último segmento de cada parte quedan $(m-1)^2$ intervalos de longitud $\frac{1}{m^2}$, de manera que la suma de sus longitudes es $\left(\frac{m-1}{m}\right)^2$; continuando el proceso, después de la k-ésima división quedan $(m-1)^k$ intervalos de longitud $\frac{1}{m^k}$, de manera que la suma de sus longitudes es $\left(\frac{m-1}{m}\right)^k = \left(1-\frac{1}{m}\right)^k$; así que esa suma tiende a cero cuando k tiende a infinito.

Utilizando el mismo método, Smith definió conjuntos densos en ninguna parte que no tienen contenido cero:

Sea m un número natural mayor que 2. Dividamos el intervalo $[0,1]$ en m partes iguales y eliminemos el último segmento. Dividamos cada uno de los $m-1$ segmentos restantes en m^2 partes iguales y eliminemos el último segmento de cada uno. Dividamos cada uno de los $(m-1)(m^2-1)$ segmentos restantes en m^3 partes iguales y eliminemos el último segmento de cada uno; y así sucesivamente.

Los conjuntos obtenidos de esta manera son densos en ninguna parte; pero no tienen contenido cero: Después de la primera división quedan $m-1$ intervalos de longitud $\frac{1}{m}$, de manera que la suma de sus longitudes es $\frac{m-1}{m}$; al dividir cada uno de esos $m-1$ intervalos en m^2 partes iguales y eliminando el último segmento de cada parte quedan $(m-1)(m^2-1)$ intervalos de longitud $\frac{1}{m^3}$, de manera que la suma de sus longitudes es $\frac{(m-1)\left(m^2-1\right)}{m^3} = \left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{1}{m^2}\right)$; continuando el proceso, después de la k-ésima división quedan $(m-1)\left(m^2-1\right)\cdots\left(m^k-1\right)$ intervalos de longitud $\frac{1}{m^{1+2+\cdots+k}}$, de manera que la suma de sus longitudes es $\frac{(m-1)\left(m^2-1\right)\cdots\left(m^k-1\right)}{m^{1+2+\cdots+k}} = \left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{1}{m^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{m^k}\right)$; por lo tanto, esa suma tiende a un valor positivo cuando k tiende a infinito ya que la serie $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{m^k}$ es convergente.

El conjunto de Cantor se define como sigue:

Paso 1. Partiendo del intervalo $[0,1]$, lo dividimos en 3 intervalos de la misma longitud y eliminamos el interior del intervalo central. Lo que resta lo definimos como C_1. De esta forma, C_1 es la unión de 2 intervalos cerrados, cada uno de los cuales tiene una longitud igual a $\frac{1}{3}$.

Paso 2. Repetimos el proceso para cada uno de los 2 intervalos cerrados que forman C_1; es decir, cada uno de ellos lo dividimos en 3 intervalos de la misma longitud y eliminamos el interior del intervalo central; de manera que, en cada uno, restan 2 intervalos cerrados de longitud $\frac{1}{3^2}$. Definimos entonces C_2 como la unión de esos 4 intervalos cerrados que restan.

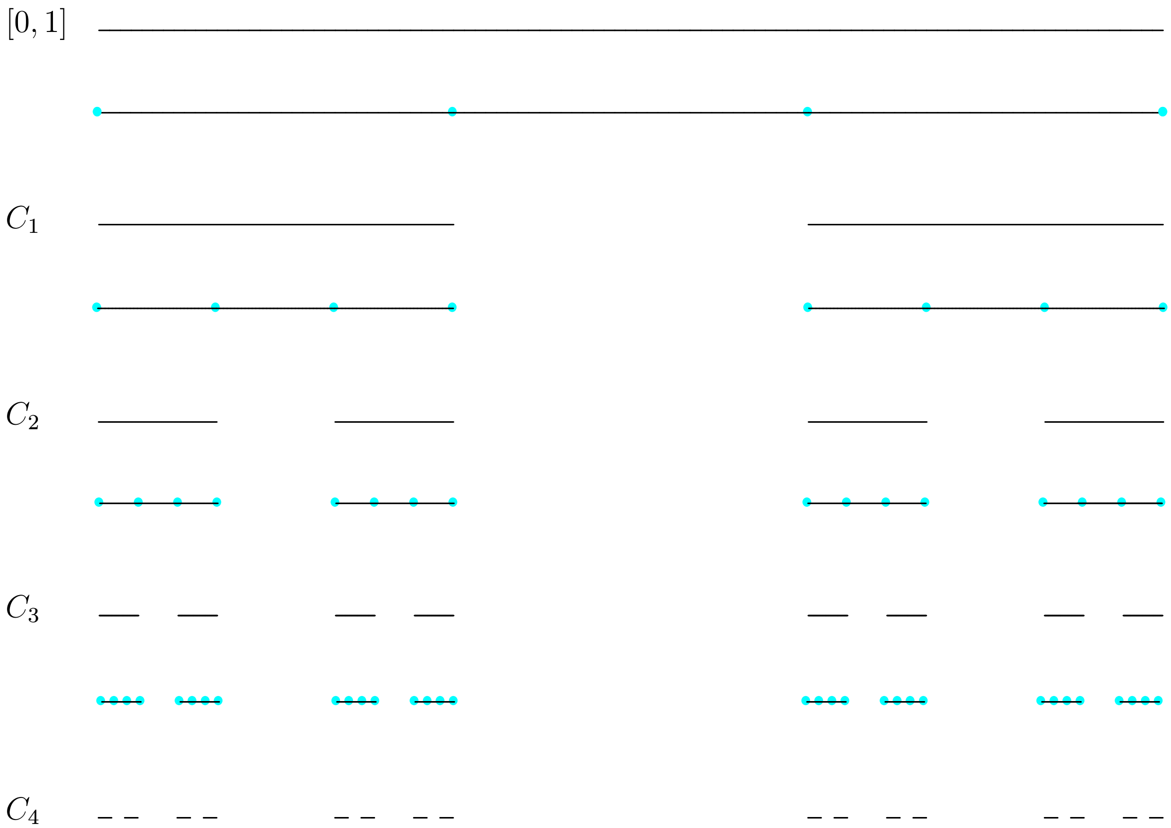
Paso 3. Repetimos el proceso para cada uno de los 2^2 intervalos cerrados que forman C_2; es decir, cada uno de ellos lo dividimos en 3 intervalos de la misma longitud y eliminamos el interior del intervalo central; de manera que, en cada uno, restan 2 intervalos cerrados de longitud $\frac{1}{3^3}$. Definimos entonces C_3 como la unión de los 2^3 intervalos cerrados que restan en total.

Continuando este proceso, en el paso k tendremos definido un conjunto C_k, el cual es la unión de 2^k intervalos cerrados, cada uno de los cuales tiene una longitud de $\frac{1}{3^k}$. Repetimos el proceso para cada uno de los 2^k intervalos cerrados que forman C_k; es decir, cada uno de ellos lo dividimos en 3 intervalos de la misma longitud y eliminamos el interior del intervalo central; de manera que, en cada uno, restan 2 intervalos cerrados de longitud $\frac{1}{3^{k+1}}$. Definimos entonces C_{k+1} como la unión de los 2^{k+1} intervalos cerrados que restan en total.

De esta forma, obtenemos, por inducción, una sucesión $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos cerrados de tal manera que, para cualquier $n\in\mathbb{N}$, $C_n \supset C_{n+1}$ y C_n es la unión de 2^n intervalos cerrados, cada uno de ellos con longitud $\frac{1}{3^n}$. Además, la sucesión $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene la estructura que se muestra en la figura de la siguiente página, continuándola indefinidamente.

Se define entonces $\mathfrak{C} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\mathbf{C}_n$.

Obsérvese que los extremos de los 2^n intervalos cerrados, cuya unión es el conjunto C_n, forman parte del conjunto de Cantor.



Además de lo anterior, el conjunto de Cantor, que denominaremos $\mathfrak{C}$, tiene otras propiedades interesantes, entre las cuales se encuentran las siguientes:

1. $\mathfrak{C}$ es un conjunto compacto.

2. Los elementos de $\mathfrak{C}$ se pueden poner en correspondencia, uno a uno, con todos los números reales del intervalo $[0, 1]$.

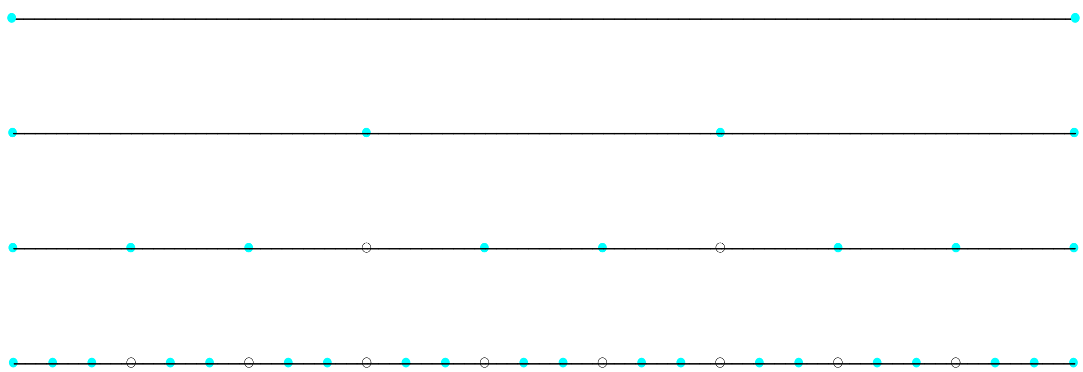
3. $\mathfrak{C}$ tiene contenido cero.

4. $\mathfrak{C}$ es la cerradura del conjunto formado por todos los racionales triádicos que pertenecen a $\mathfrak{C}$.

5. Para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{C}$ se puede expresar como la unión de 2^n conjuntos, ajenos por parejas, cada uno de los cuales tiene las mismas propiedades que $\mathfrak{C}$ mismo.

Vamos a demostrar las propiedades que enunciamos antes; pero, ya que se va a requerir más adelante, antes vamos a recordar la manera en que se obtiene el desarrollo en base 3 de los números reales del intervalo $[0, 1]$.

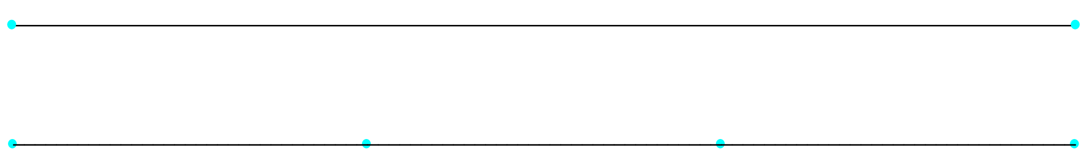
Para obtener el desarrollo en base 3 de un número real z en el intervalo $[0,1]$ loque se hace es considerar primero una división del intervalo $[0,1]$ en 3 intervalos de la misma longitud; después, dependiendo del subintervalo al que pertenezca z, se divide ese intervalo en 3 intervalos de la misma longitud y se continúa ese proceso hasta tener todo el desarrollo de z.



Denominaremos racionales triádicos a los números racionales de la forma $\frac{k}{3^n}$, donde $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \{0, 1, 2, \dots, 3^n\}$. Al conjunto formado por los racionales triádicos lo denotaremos por $\mathbb{T}$.

Consideremos cualquier número real $z \in [0,1] - \mathbb{T}$.

Para obtener el primer dígito del desarrollo de z en base 3, se divide el intervalo $[0,1]$ en 3 intervalos cerrados de la misma longitud.



Si z pertenece al primero de esos intervalos, el primer dígito del desarrollo de z en base 3 es 0; si pertenece al segundo intervalo, el primer dígito es 1 y si pertenece al tercero, el primer dígito es 2. Denotemos por α_1 a ese primer dígito.

Como estamos excluyendo a los racionales triádicos, ese primer dígito queda únicamente determinado.

Para obtener el segundo dígito, se divide se divide en 3 intervalos cerrados de la misma longitud el intervalo seleccionado en el paso anterior.

Si z pertenece al primero de esos intervalos, el segundo dígito del desarrollo de z en base 3 es 0; si pertenece al segundo intervalo, el segundo dígito es 1 y si pertenece al tercero, el segundo dígito es 2. Denotemos por α_2 a ese segundo dígito.

Ese segundo dígito también queda únicamente determinado.

Para obtener el tercer dígito, se divide se divide en 3 intervalos cerrados de la misma longitud el intervalo seleccionado en el paso anterior.

Si z pertenece al primero de esos intervalos, el tercer dígito del desarrollo de z en base 3 es 0; si pertenece al segundo intervalo, el tercer dígito es 1 y si pertenece al tercero, el tercer dígito es 2. Denotemos por α_3 a ese tercer dígito.

Ese tercer dígito también queda únicamente determinado.

Continuando este proceso indefinidamente, obtenemos un desarrollo único de z en base 3. Para referirnos a ese desarrollo utilizaremos la notación $(0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots)_3$.

Formalmente, esa notación es una manera de decir que la serie $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k}{3^k}$ converge a z.

Obsérvemos que hay una infinidad de dígitos distintos de cero en el desarrollo en base 3 de cualquier número real $z \in [0,1] - \mathbb{T}$.

En efecto, si hubiera únicamente un número finito de esos dígitos y α_m fuera el último dígito distinto de cero, z tendría la forma siguiente:

$$z = (0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m000\cdots)_3 = \sum_{k=1}^{m}\frac{\alpha_k}{3^k} = \sum_{k=1}^{m}\frac{\alpha_k 3^{m-k}}{3^m} = \frac{1}{3^m}\sum_{k=1}^{m}\alpha_k 3^{m-k}$$

La suma $\sum_{k=1}^{m}\alpha_k 3^{m-k}$ es un número natural; además:

$$\sum_{k=1}^{m}\alpha_k 3^{m-k} \leq 2\sum_{k=1}^{m}3^{m-k} = 2\left(3^m\right)\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{3^k} = 2\left(3^m\right)\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{3^{m+1}}}{1-\frac{1}{3}} = 3^m\left(1-\frac{1}{3^m}\right) = 3^m - 1$$

Así que z sería un racional triádico en el intervalo $(0,1)$.

Si $z \in \mathbb{T} - \{0,1\}$, su desarrollo en base 3 se obtiene con el mismo proceso que describimos antes; pero, en este caso, z admite dos desarrollos en base 3.

Por ejemplo, $\frac{1}{3}$ lo podemos considerar dentro del intervalo $\left[0,\frac{1}{3}\right]$, así como dentro del intervalo $\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$. En el primer caso obtenemos $\frac{1}{3} = (0{,}022222\cdots)_3$, mientras que en el segundo caso obtenemos $\frac{1}{3} = (0{,}100000\cdots)_3$.

Otro ejemplo: $\frac{20}{3^3}$ lo podemos considerar dentro del intervalo $\left[\frac{19}{3^3}, \frac{20}{3^3}\right]$, así como dentro del intervalo $\left[\frac{20}{3^3}, \frac{21}{3^3}\right]$. En el primer caso obtenemos $\frac{20}{3^3} = (0{,}20122222\cdots)_3$, mientras que en el segundo caso obtenemos $\frac{20}{3^3} = (0{,}20200000\cdots)_3$.

Por útimo una observación:

Consideremos el proceso de división en 3 intervalos de la misma longitud que se hace para obtener el dígito α_n, con $n \in \mathbb{N}$, del desarrollo en base 3 de un número real $z \in [0,1]$.

Tomemos cualquier intervalo del n-simo paso del proceso de división; digamos el intervalo $\left[\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n}\right]$, donde $k \in \{0,1,2,\ldots,3^n-1\}$.

Ese intervalo proviene de la división en 3 intervalos de la misma longitud de un único intervalo bien definido de la forma $\left[\frac{j}{3^{n-1}}, \frac{j+1}{3^{n-1}}\right]$, donde $j \in \{0,1,2,\ldots,3^{n-1}-1\}$.

A su vez, si $n > 1$, ese segundo intervalo proviene de la división en 3 intervalos de la misma longitud de un único intervalo bien definido de la forma $\left[\frac{i}{3^{n-2}}, \frac{i+1}{3^{n-2}}\right]$, donde $j \in \{0,1,2,\ldots,3^{n-1}-1\}$.

Continuando con ese proceso, hacia atrás, hasta llegar al intervalo $[0,1]$, podemos ver que, hasta el dígito α_{n-1}, todos los números reales del intervalo $\left[\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n}\right]$ tienen el mismo desarrollo en base 3 y, exceptuando a los extremos, también tienen el mismo dígito α_n. Así que, asociada al intervalo $\left(\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n}\right)$, hay una única secuencia de n digitos, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, todos ellos en el conjunto $\{0,1,2\}$, los cuales constituyen los primeros n digitos del desarrollo en base 3 de cualquier número real $z \in \left(\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n}\right)$.

Inversamente, dada una secuencia de n digitos, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, todos ellos en el conjunto $\{0,1,2\}$, esos digitos constituyen los primeros n digitos del desarrollo en base 3 de cualquier número real en algún intervalo de la forma $\left(\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n}\right)$, donde $k \in \{0,1,2,\ldots,3^n-1\}$.

Pasemos ahora a demostrar las propiedades del conjunto de Cantor.

1. $\mathfrak{C}$ es un conjunto compacto ya que es cerrado y acotado.

2. Los elementos de $\mathfrak{C}$ se pueden poner en correspondencia, uno a uno, con todos los números reales del intervalo $[0,1]$.

Observemos que si $z \in [0,1] - \mathbb{T}$ y z pertenece al conjunto de Cantor, entonces ningún dígito del desarrollo de z en base 3 es el 1.

En efecto, esto es así ya que en cada paso de la definición de $\mathfrak{C}$ se elimina el interior del intervalo central, en el cual el correspondiente dígito α_k es 1.

Consideremos ahora los racionales triádicos que pertenecen al conjunto de Cantor:

En el primer paso para la definición del conjunto de Cantor, obtenemos los racionales triádicos $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$.

$\frac{1}{3}$ pertenece tanto al intervalo $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ como al intervalo $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$. Elijamos el intervalo distinto al intervalo central.

Hagamos lo mismo para $\frac{2}{3}$, el cual pertenece tanto al intervalo $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ como al intervalo $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Elijamos el intervalo distinto al intervalo central.

De esta forma, obtenemos los siguientes desarrollos en base 3:

$$\tfrac{1}{3} = (0{,}02222\cdots)_3$$

$$\tfrac{2}{3} = (0{,}20000\cdots)_3$$

En los pasos siguientes de la definición del conjunto de Cantor, sigamos el mismo procedimiento, a saber, para cada racional triádico del conjunto de Cantor elijamos el intervalo distinto al intervalo central.

En el paso 2, obtenemos, además de los obtenidos en el paso 1, los racionales triádicos $\frac{1}{3^2}, \frac{2}{3^2}, \frac{7}{3^2}, \frac{8}{3^2}$, cuyos desarrollos en base 3 son los siguientes:

$$\tfrac{1}{3^2} = (0{,}002222\cdots)_3$$

$$\tfrac{2}{3^2} = (0{,}020000\cdots)_3$$

$$\tfrac{7}{3^2} = (0{,}202222\cdots)_3$$

$$\tfrac{8}{3^2} = (0{,}220000\cdots)_3$$

Continuando de esta forma, obtenemos que todos los racionales triádicos del conjunto de Cantor tienen un único desarrollo en base 3 tal que $\alpha_k \in \{0, 2\}$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$.

Combinando este resultado con lo anterior, podemos concluir que cualquier elemento del conjunto de Cantor admite un desarrollo en base 3 tal que $\alpha_k \in \{0, 2\}$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$.

Finalmente $[0, 1] - \mathfrak{C}$ es la unión de la totalidad de intervalos abiertos que se eliminan en el proceso de definición de $\mathfrak{C}$, los cuales son ajenos por parejas. Así que, si $z \in [0, 1]$ no pertenece al conjunto de Cantor entonces z pertenece a uno y sólo uno de esa familia de intervalos. La longitud de ese intervalo es $\frac{1}{3^m}$ para alguna $m \in \mathbb{N}$. Se sigue entonces que el m-simo dígito del desarrollo en base 3 de z es 1.

Por lo tanto, cualquier elemento $z \in [0, 1]$ pertenece al conjunto de Cantor si y sólo si z admite un desarrollo en base 3 tal que $\alpha_k \in \{0, 2\}$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$.

Definamos:

$\mathcal{C}$ como el conjunto de sucesiones $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tales que $\alpha_k \in \{0, 2\}$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$.

$\mathcal{C}'$ como el conjunto de sucesiones en $\mathcal{C}$ que contienen una infinidad de 0's, así como una infinidad de 2's.

$\mathcal{B}$ como el conjunto de sucesiones $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tales que $\beta_k \in \{0, 1\}$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$ y que contienen una infinidad de 0's, así como una infinidad de 1's.

$\mathbb{B}$ como el conjunto de racionales diádicos en el intervalo $[0, 1]$.

Las sucesiones en $\mathcal{C}$ son las que se obtienen al desarrollar los elementos del conjunto de Cantor en base 3, mientras que las sucesiones en $\mathcal{B}$ son las que se obtienen al desarrollar los elementos del intervalo $[0, 1]$, exceptuando a los racionales diádicos, en base 2.

Es evidente que los elementos de $\mathcal{C}'$ se pueden poner en correspondencia, uno a uno, con los elementos de $\mathcal{B}$.

Por otra parte, tanto $\mathbb{B}$ como $\mathcal{C} - \mathcal{C}'$ son conjuntos infinitos numerables, de manera que sus elementos se pueden poner en correspondencia uno a uno.

Por lo tanto, los elementos de $\mathcal{C}$ se pueden poner en correspondencia, uno a uno, con elementos de $\mathcal{B}\cup\mathbb{B}$; es decir, los elementos del conjunto de Cantor se pueden poner en correspondencia, uno a uno, con todos los elementos del intervalo $[0, 1]$.

3. $\mathfrak{C}$ es denso en ninguna parte.

En efecto, Sea I un intervalo abierto tal que $I \cap (0, 1) \neq \emptyset$.

Si $I \cap \mathfrak{C} = \emptyset$, entonces $I \subset \mathfrak{C}^c$.

Si $I \cap \mathfrak{C} \neq \emptyset$, sea $z \in I \cap \mathfrak{C}$, entonces $z \in C_m$ para cualquier $m \in \mathbb{N}$.

Como I es un intervalo abierto y $z \in I$, podemos tomar un número real $\varepsilon > 0$ tal que el intervalo abierto de centro z y radio ε esté contenido en I.

Sea $M \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{3^M} < \varepsilon$.

Como $z \in C_M$ y este conjunto es la unión de 2^M intervalos cerrados ajenos, cada uno de los cuales tiene longitud $\frac{1}{3^M}$. z pertenece a alguno de esos intervalos, el cual denotaremos por J.

Como $z \in J$ y la longitud de J es menor que ε, $J \subset I$.

Ahora bien, en el proceso de definición de $\mathfrak{C}$, el intervalo J se divide en 3 intervalos de la misma longitud y se elimina el subintervalo central abierto, el cual denotaremos por K.

Se tiene entonces que K es un intervalo abierto contenido en I y $K \subset \mathfrak{C}^c$.

4. $\mathfrak{C}$ tiene contenido cero:

Obsérvese que definimos el conjunto de Cantor como la intersección de una familia infinita numerable de conjuntos cerrados $C_1, C_2, C_3 \ldots$ y que, para cada $n \in \mathbb{N}$, C_n es la unión de 2^n intervalos cerrados, cada uno de ellos con longitud $\frac{1}{3^n}$. Así que, la suma de las longitudes de los 2^n intervalos cuya unión es C_n es igual a $\frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$, valor que podemos llamar la longitud de C_n.

Con lo anterior podemos ver que el conjunto de Cantor está contenido, no sólo en una unión de intervalos muy pequeños, sino que, cualquiera que sea el número natural n, el conjunto de Cantor está contenido en un conjunto de longitud $\left(\frac{2}{3}\right)^n$. Esta es la base para probar que $\mathfrak{C}$ tiene contenido cero.

Dada $\varepsilon > 0$, tomemos $m \in \mathbb{N}$ tal que $\left(\frac{2}{3}\right)^m < \frac{\varepsilon}{2}$.

Sean $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, $[a_3, b_3]$, $\ldots$, $[a_{2^m}, b_{2^m}]$ los 2^m intervalos cerrados ajenos cuya unión es igual a C_m.

Para cada $n \in \{1, 2, 3, \ldots, 2^m\}$ tomemos un intervalo abierto I_n de centro a_n y un intervalo abierto J_n de centro b_n, cada uno de ellos con longitud igual a $\frac{1}{2^{m+2}}\varepsilon$.

La familia de intervalos formada por (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3), $\ldots$, (a_{2^m}, b_{2^m}), $I_1, I_2, I_3, \ldots, I_{2^m}$, $J_1, J_2, J_3, \ldots, J_{2^m}$ constituyen una cubierta de C_m y, como $\mathfrak{C} \subset C_m$, también constituyen una cubierta de $\mathfrak{C}$. Además, la suma de sus longitudes está dada por:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^m + \frac{2^m}{2^{m+2}}\varepsilon + \frac{2^m}{2^{m+2}}\varepsilon = \left(\frac{2}{3}\right)^m + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Así que, para cualquier $\varepsilon > 0$, existe una familia finita de intervalos abiertos cuya unión cubre a $\mathfrak{C}$ y tales que la suma de sus longitudes es menor que ε. Por lo tanto $\mathfrak{C}$ tiene contenido cero.

5. Cualquier elemento de $\mathfrak{C}$ es punto de acumulación de $\mathfrak{C}$.

Queremos demostrar que, si $y \in \mathfrak{C}$, entonces, dada cualquier $\varepsilon > 0$, existe algún elemento de $\mathfrak{C}$, distinto de y, en el intervalo $(y - \varepsilon, y + \varepsilon)$.

Dada $\varepsilon > 0$, tomemos $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{3^N} < \varepsilon$.

Como $y \in C_N$ y C_N está formado por 2^N intervalos cerrados ajenos, cada uno de ellos con longitud $\frac{1}{3^N}$, y pertenece a alguno de esos intervalos, el cual tiene la forma $\left[\frac{K}{3^N}, \frac{K+1}{3^N}\right]$, para alguna $K \in \left\{0, 1, 2, \ldots, 3^N - 1\right\}$. Denotemos por J_N a ese intervalo.

Si se observa el proceso para la definición del conjunto de Cantor, se puede ver que, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, los extremos de los 2^n intervalos cerrados ajenos cuya unión es C_n, pertenecen al conjunto de Cantor.

Así que, $\frac{K}{3^N}$ y $\frac{K+1}{3^N}$ pertenecen al conjunto de Cantor.

Como $y \in \left[\frac{K}{3^N}, \frac{K+1}{3^N}\right]$, se tiene:

$$y - \frac{K}{3^N} \leq \frac{1}{3^N} < \varepsilon$$

$$\frac{K+1}{3^N} - y \leq \frac{1}{3^N} < \varepsilon$$

Es decir, la distancia de y a cualquiera de los extremos del intervalo J_N es menor que ε. Además, por lo menos uno de esos extremos es distinto de y. Así que, definiendo z como cualquiera de los extremos que sea distinto de y, se tiene que $z \in \mathfrak{C}$, $z \neq y$ y $z \in (y - \varepsilon, y + \varepsilon)$.

Con esto queda demostrado que cualquier elemento de $\mathfrak{C}$ es punto de acumulación de $\mathfrak{C}$.

Obsérvese que, con la demostración anterior de esta propiedad y tomando en cuenta que $\mathfrak{C}$ es cerrado, se demuestra también que el conjunto de Cantor es la cerradura del conjunto de racionales triádicos que pertenecen al mismo.

Obsérvese también que el conjunto de racionales triádicos que pertenecen al conjunto de Cantor es la unión de los extremos de los intervalos cerrados, ajenos por parejas, que forman parte de $C_1, C_2, \ldots$; de manera que, para cada $n \in \mathbb{N}$, siendo 2^n el número de intervalos cuya unión es C_n, este conjunto contiene 2^{n+1} racionales triádicos.

Ahora continuemos con lo anterior:

Como $y \in \left[\frac{K}{3^N}, \frac{K+1}{3^N}\right]$ y $\frac{1}{3^N} < \varepsilon$, se tiene que:

$$y - \varepsilon < \frac{K}{3^N} < \frac{K+1}{3^N} < y + \varepsilon$$

Por lo tanto:

$$J_N \subset (y - \varepsilon, y + \varepsilon)$$

Sigamos analizando más:

Al partir J_N en 3 intervalos de la misma longitud, se obtienen los siguientes intervalos ajenos:

$$\left[\frac{K}{3^N}, \frac{K}{3^N} + \frac{1}{3^{N+1}}\right], \left(\frac{K}{3^N} + \frac{1}{3^{N+1}}, \frac{K}{3^N} + \frac{2}{3^{N+1}}\right) \text{ y } \left[\frac{K}{3^N} + \frac{2}{3^{N+1}}, \frac{K}{3^N} + \frac{1}{3^N}\right]$$

Para formar $\mathfrak{C}$, el intervalo $\left(\frac{K}{3^N} + \frac{1}{3^{N+1}}, \frac{K}{3^N} + \frac{2}{3^{N+1}}\right)$ se elimina y, como $y \in \mathfrak{C}$, entonces y pertenece a alguno de los dos intervalos restantes. De esos 2 intervalos, tomemos el que no contiene a y y denotémoslo por J_{N+1}.

Tomamos el intervalo que no contiene a y porque queremos encontrar un número real $z \in \mathfrak{C}$, distinto de y, tal que $|y - z| < \varepsilon$.

Se tiene:

$J_{N+1} \subset (y - \varepsilon, y + \varepsilon)$

$y \notin J_{N+1}$

J_{N+1} es uno de los intervalos que forman C_{N+1}.

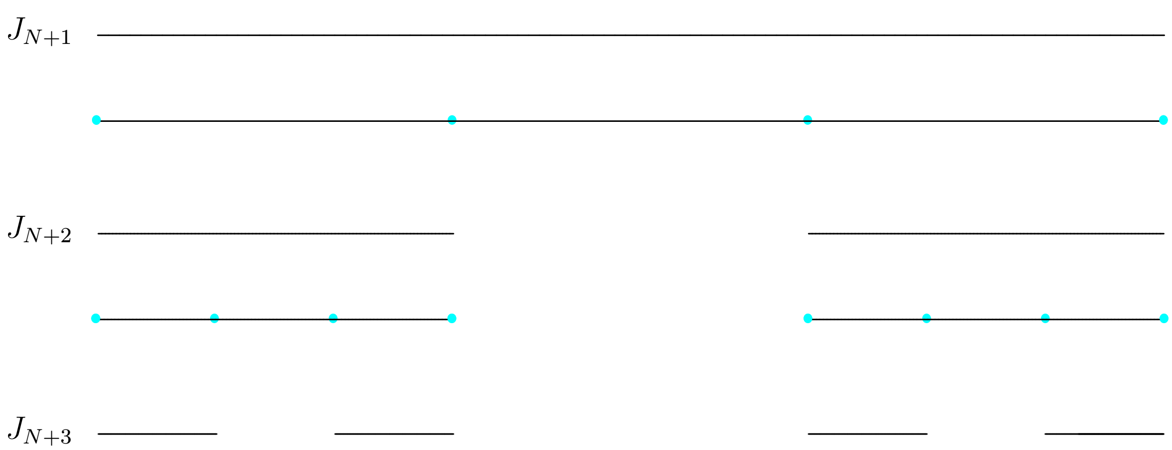
Comenzando con J_{N+1}, consideremos el proceso con el que definimos el conjunto de Cantor partiendo del intervalo $[0, 1]$.

Denotemos por $J_{N+2}, J_{N+3}, \ldots$ los conjuntos cerrados que se van formando.

La intersección, $\mathbf{J}$, de todos esos intervalos es un subconjunto cerrado, no vacío, del conjunto de Cantor.

Como J_{N+1} está contenido en el intervalo $(y - \varepsilon, y + \varepsilon)$ y $\mathbf{J} \subset J_N$, entonces todo el conjunto $\mathbf{J}$ está contenido en el intervalo $(y - \varepsilon, y + \varepsilon)$. Además, como $y \notin J_{N+1}$, tampoco está en $\mathbf{J}$.

Observemos que J tiene las mismas propiedades que el conjunto de Cantor: es un conjunto compacto, es denso en ninguna parte, tiene contenido cero y todo elemento de J es punto de acumulación de J.



Para mostrar que los elementos de $\mathbf{J}$ se pueden poner en correspondencia, uno a uno, con todos los números reales del intervalo $[0, 1]$, observemos que J_{N+1} es alguno de los intervalos $\left[\frac{3K}{3^{N+1}}, \frac{3K+1}{3^{N+1}}\right]$ o $\left[\frac{3K+2}{3^{N+1}}, \frac{3K+3}{3^{N+1}}\right]$; es decir, un intervalo de la forma $\left[\frac{j}{3^{N+1}}, \frac{j+1}{3^{N+1}}\right]$, para alguna $j \in \left\{0, 1, 2, \ldots, 3^{N+1} - 1\right\}$.

Como se analizó con anterioridad, todos los elementos $z \in \left(\frac{j}{3^{N+1}}, \frac{j+1}{3^{N+1}}\right)$ tienen el mismo desarrollo en base 3, hasta el digito $N + 1$. Denotemos por $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{N+1}$ a esos digitos.

Como J_{N+1} está contenido en C_{N+1}, se tiene que $\beta_k \in \{0, 2\}$ para cualquier $k \in \{1, 2, \ldots, N + 1\}$.

Definamos $\mathcal{D}$ como el conjunto de sucesiones $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tales que $\alpha_k = \beta_k$ para cualquier $k \in \{1, 2, \ldots, N + 1\}$ y $\alpha_k \in \{0, 2\}$ para cualquier $k \in \mathbb{N} - \{1, 2, \ldots, N + 1\}$, $\mathcal{D}'$ como el conjunto de sucesiones en $\mathcal{D}$ que contienen una infinidad de 0's, así como una infinidad de 2's, $\mathcal{B}$ como el conjunto de sucesiones $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tales que $\beta_k \in \{0, 1\}$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$ y que contienen una infinidad de 0's, así como una infinidad de 1's y $\mathbb{B}$ como el conjunto de racionales diádicos en el intervalo $[0, 1]$.

Las sucesiones en $\mathcal{D}$ son las que se obtienen al desarrollar los elementos del conjunto $\mathbf{J}$ en base 3, mientras que las sucesiones en $\mathcal{B}$ son las que se obtienen al desarrollar los elementos del intervalo $[0, 1]$, exceptuando a los racionales diádicos, en base 2.

Asociando cada elemento $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{N+1}, \alpha_{N+2}, \alpha_{N+3} \cdots$ en $\mathcal{D}'$ con el elemento $\frac{\alpha_{N+2}}{2}, \frac{\alpha_{N+3}}{2}, \cdots$ en $\mathcal{B}$, tenemos una correspondencia, uno a uno, entre los elementos de $\mathcal{D}'$ y los elementos de $\mathcal{B}$.

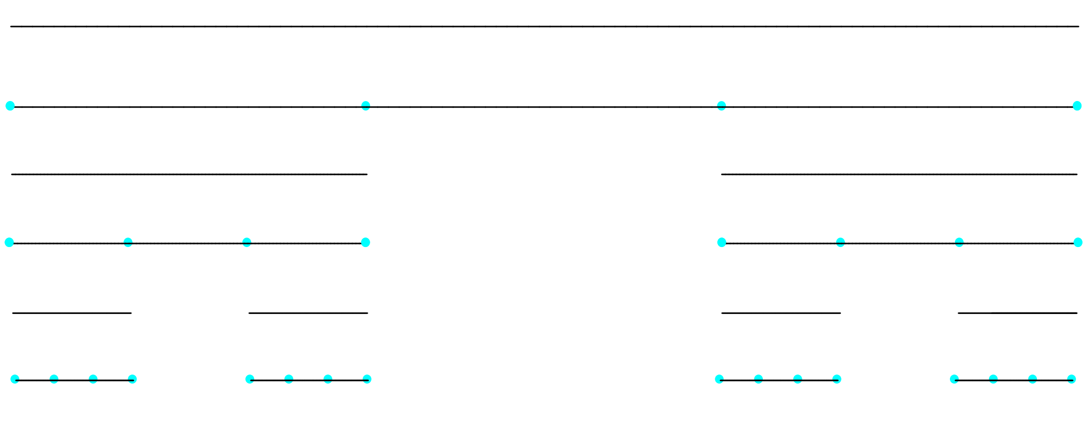
Por otra parte, tanto $\mathbb{B}$ como $\mathcal{D} - \mathcal{D}'$ son conjuntos infinitos numerables, de manera que sus elementos se pueden poner en correspondencia uno a uno.

Por lo tanto, los elementos de $\mathbf{J}$ se pueden poner en correspondencia, uno a uno, con todos los elementos de $\mathcal{B} \cup \mathbb{B}$; es decir, con todos los números reales del intervalo $[0, 1]$.

Además, dado un elemento y en el conjunto de Cantor $\mathfrak{C}$ y un número real $\varepsilon > 0$, hemos mostrado que existe un conjunto $\mathbf{J} \subset \mathfrak{C}$ tal que cualquier elemento de $\mathbf{J}$ es distinto de y y dista de y en menos que ε. Es decir, hemos probado que no únicamente hay un elemento $z \in \mathfrak{C}$ tal que $z \neq y$ y dista de y en menos que ε, sino que hay una infinidad no numerable de esos puntos.

Observemos también que $\mathbf{J}$ es un subconjunto propio de $\mathfrak{C}$. En efecto, J_N es la unión de 3 intervalos, dos de los cuales son cerrados y uno de estos últimos es J_{N+1}. Comenzando con el otro intervalo cerrado, podemos considerar el proceso con el que definimos el conjunto de Cantor partiendo del intervalo $[0, 1]$. El conjunto que obtendríamos y el conjunto $\mathbf{J}$ son ajenos.

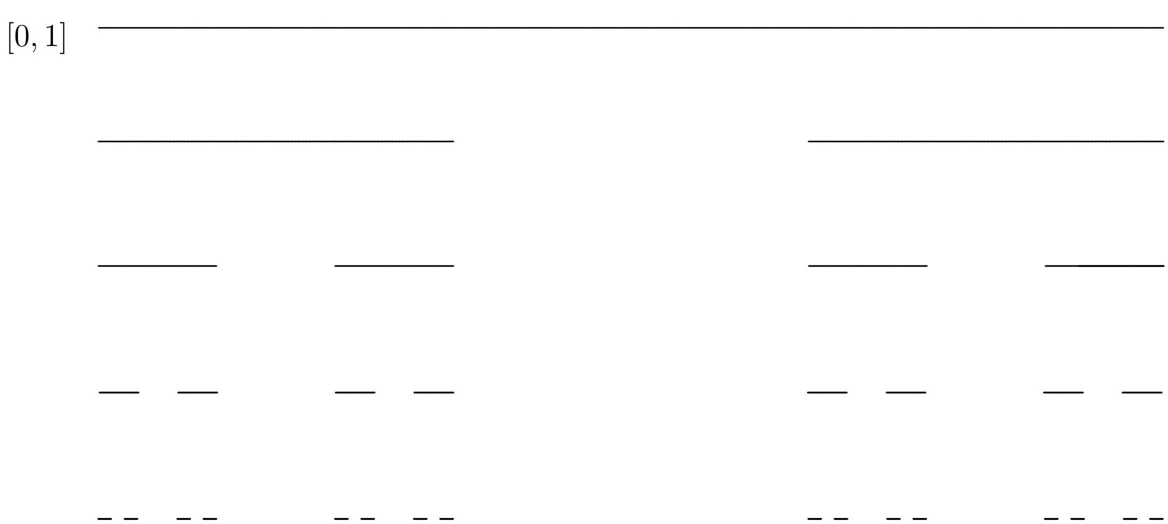
J_N



Más aún, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, C_n es la unión de 2^n intervalos cerrados y, comenzando con cualquiera de ellos, podemos considerar el proceso con el que definimos el conjunto de Cantor partiendo del intervalo $[0, 1]$. Los 2^n conjuntos que se obtienen son ajenos y cada uno de ellos tiene las mismas propiedades que el conjunto de Cantor.

Así que, **para cualquier $n \in \mathbb{N}$, el conjunto de Cantor se puede expresar como la unión de 2^n conjuntos, ajenos por parejas, cada uno de los cuales tiene las mismas propiedades que el conjunto de Cantor.**

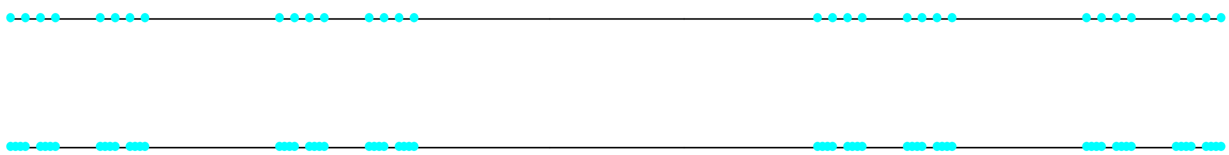
Por ejemplo, dentro de cada uno de los intervalos del último renglón de la siguiente figura hay un conjunto con las mismas propiedades que las del conjunto de Cantor.



Podemos ver que el conjunto de Cantor es bastante extraño. Su definición, ya sea geométrica o analítica, es simple; sin embargo, imaginar cómo queda repartido, geométricamente, en el intervalo $[0, 1]$ es muy difícil.

Pero, no hay que olvidar que la recta numérica es únicamente una imagen que nos hacemos del conjunto de los números reales; está formada por puntos que representan números racionales e irracionales, los cuales también son difíciles de imaginar geométricamente. Dado un número real cualquiera x_0, podemos imaginarlo en la recta numérica; pero, después de ese número, no hay uno siguiente, ya que cualquiera que sea la distancia que nos movamos hacia la derecha, por pequeña que sea, recorreríamos, por decirlo de alguna manera, tanto una infinidad de números racionales como irracionales. Dicho de otra forma, si ε es un número real positivo cualquiera, entonces, dentro del intervalo $[x_0, x_0 + \varepsilon)$, así sea pequeñísimo el número ε, se reproduce dentro de ese intervalo la estructura de todo el conjunto de números reales; hay dentro de él una infinidad de números racionales e irracionales repartidos como en toda la recta. Imaginar todos esos puntos como si estuvieran "pegados" unos con otros nos daría una falsa idea ya que cada punto tiene longitud cero.

Regresando al conjunto de Cantor y aceptando una recta como representación geométrica del conjunto de los números reales, visto desde lejos el conjunto de Cantor, digamos en el intervalo $[0, 1]$ de alguno de los ejes, en un espacio tridimensional, veríamos "puntos" repartidos en ese intervalo; aunque en realidad esos puntos son conjuntos infinitos no numerables, pero de longitud cero; ¡algo rarísimo! Imaginándolos, serían como cúmulos en el espacio, cada uno con una infinidad de estrellas dentro de él; pero que, a la distancia, se verían como puntos difusos.



Formalmente, dentro de la matemática, el conjunto de los números reales está perfectamente bien definido. De igual manera, lo está el conjunto de Cantor, el cual tiene propiedades asombrosas, las cuales hacen de ese conjunto una verdadera obra de arte matemático.